

# Geogebra e Storia della Matematica: riscopriamo la "cuffia di Beltrami"

Maria Angela Chimetto  
Geogebra Institute CRDM-Padova  
DIFIMA GEOGEBRA DAY  
Torino 18 ottobre 2017

# Il primo modello materiale di geometria iperbolica: la “cuffia” di Beltrami





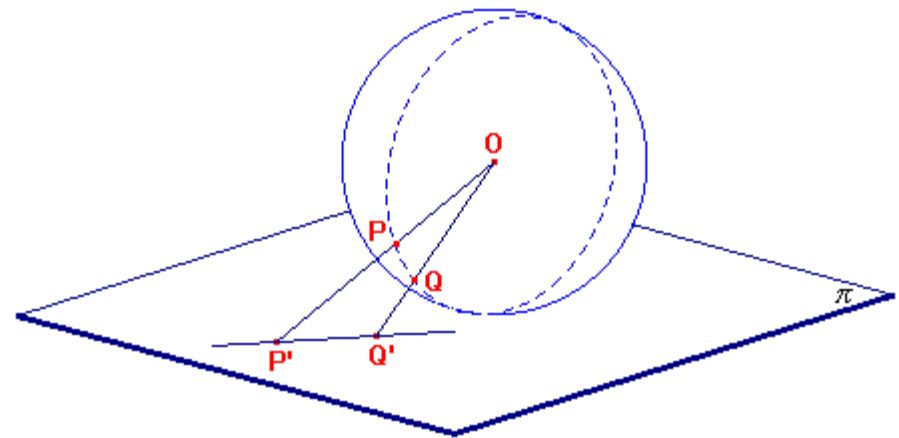
Eugenio Beltrami (1835 - 1900)

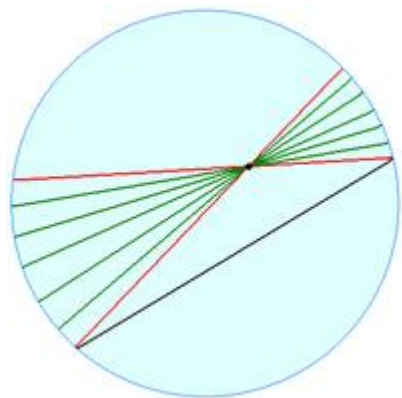
Cremona, 16 novembre 1835 - Roma, 18 febbraio 1900.

Prima di conseguire la laurea, nel 1856 interruppe gli studi all'Università di Pavia dopo essere stato espulso dal collegio Ghislieri per motivi politici. Frequentò, per qualche tempo, l'Osservatorio astronomico di Brera a Milano. Costitutosi il Regno d'Italia, nel 1862 Brioschi lo fece nominare (senza concorso) professore straordinario di algebra e geometria analitica all'Università di Bologna. A partire da quel momento insegnò nelle Università di Bologna, (1862-63 e poi, di nuovo, 1866-70), Pisa (1863-66), Roma (1873-76) e Pavia (1876-91). In seguito si stabilì definitivamente a Roma, dove prese il posto di Brioschi alla presidenza dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Pochi mesi prima di morire fu nominato senatore del Regno. Nell'Accademia dei Lincei si conserva un suo busto.

Per la sua formazione scientifica fu decisivo il periodo pisano (1863-66), in cui frequentò Betti e **Riemann** (1826-1866). A Pisa, inoltre, **dovette insegnare geodesia**; questo lo portò a riflettere sui problemi di geometria differenziale dal punto di vista riemanniano, da cui prese origine la sua celebre realizzazione concreta della geometria non euclidea sulla pseudofera. Altri suoi importanti lavori riguardano varie questioni di teoria del potenziale e dell'elasticità e le onde elettromagnetiche. I suoi lavori, redatti in una forma chiara ed elegante, sono divenuti dei modelli per lo stile matematico.

Nell'articolo *Risoluzione del problema : "riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette"* mostra che una tale rappresentazione è possibile solo se la superficie ha curvatura costante. Nel caso della curvatura positiva la superficie è quella di una **sfera** e la corrispondenza è una **proiezione centrale**





# Eugenio Beltrami

Beltrami mostra che, se la curvatura è negativa, l'intera superficie viene “proiettata” all'interno di un cerchio. Le corde del cerchio sono quindi le “ombre” di geodetiche della superficie.

Data una corda  $r$  e un punto  $P$  che non le appartiene esistono più corde per  $P$  che non intersecano  $r$  all'interno del cerchio. Quindi nella superficie proiettata esistono più “rette” parallele a una “retta” data in un punto

# Un lavoro su due livelli

Beltrami studia le proprietà delle superficie a curvatura costante negativa e ne costruisce una “proiezione” su un disco (“modello” di Beltrami-Klein)

Contemporaneamente continua ad indagare sulle proprietà della pseudosfera “fisica”, costruisce un “modello materiale” che realizza personalmente e ne prospetta una eventuale produzione industriale

*“Ho avuto, in questo periodo, una idea bizzarra, che vi comunico in quanto potrebbe essere per voi più facile che per me metterla in esecuzione. Ho voluto tentare di costruire materialmente la superficie pseudosferica, sulla quale si realizzano i teoremi della geometria non euclidea.” (corrispondenza Beltrami-Houel, lettera del 13 Marzo 1869)*

# La “cuffia” di Beltrami

Tra il 1869 e il 1872 Beltrami costruisce più modelli in carta della superficie pseudosferica, nel 1869 ne invia anche uno a Luigi Cremona, accompagnato da una lettera.

*Carissimo Cremona, in questo momento ho rimesso ad un inserviente della strada ferrata, (...), un involto cilindrico contenente il modello che ti ho promesso, di un pezzo circolare di superficie pseudosferica. Ho caldamente raccomandato al detto signore di trasportarlo con tutto il riguardo e di non lasciarlo mai uscire di mano (...). Bisogna che io ti dia qualche istruzione per quello che devi fare al ricevimento del pacco, perché si tratta di cosa di forma e di natura insolita (...).*

Anche Felice Casorati viene in possesso di un esemplare del modello di carta. Nel 1873 Felice Casorati, nella prolusione per l'inizio dell'anno accademico a Pavia, mostra il modello di Beltrami e illustra il concetto di curvatura costante

*“Prendiamo una sfera e costruiamovi sopra una figura: poiché potremmo costruire la figura medesima in qualunque altra regione della sfera e con qualunque orientazione, è chiaro che potremmo far muovere cotesta figura liberamente sulla sfera, farla scivolare sulla sfera dovunque, senza alterarsi. La stessa proprietà ha luogo sopra di un piano. La stessa finalmente ha luogo in una superficie pseudosferica. (...). (l’oratore presentò un modello in carta di tale superficie costruito dal Beltrami) Prendiamo adesso una superficie a curvatura variabile (... un uovo...): una figura costruita su una regione non può scivolare verso regioni di curvatura più piccola...”*

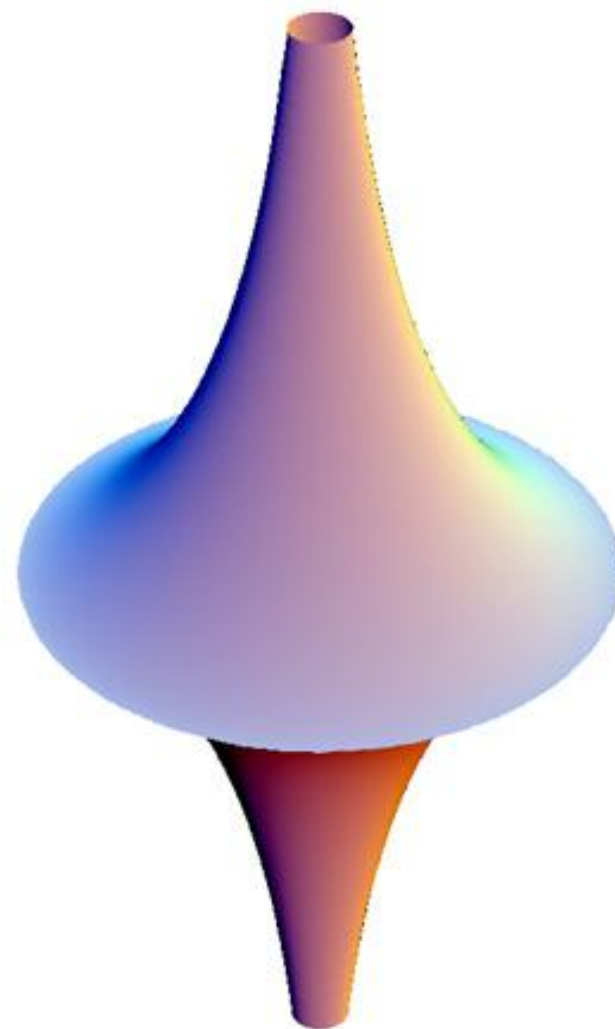
Il giornale satirico pavese “*La Canaglia*” pubblica una parodia del discorso di Casorati dove affibbia al modello il nome di “**cuffia** della nonna”

“...così resta spiegato il fenomeno della cuffia di mia nonna (il prof. Casorati fa vedere agli astanti la cuffia in questione”



# Dubbi sull'esistenza della “pseudosfera completa”

Helmoltz e Klein esprimono seri dubbi sull'esistenza di una superficie pseudosferica. Anche Genocchi si unisce alle critiche. Beltrami cerca di rispondere esibendo lo studio della superficie generata dalla rivoluzione della trattrice, che viene spesso chiamata pseudosfera e che però approssima il piano iperbolico solo localmente .

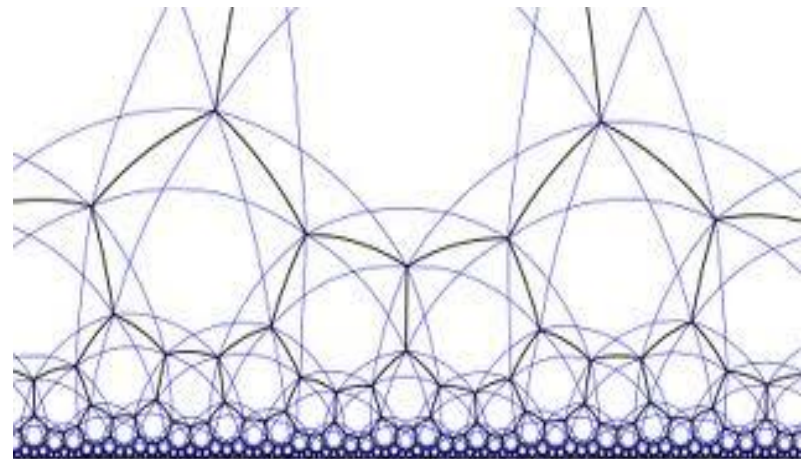
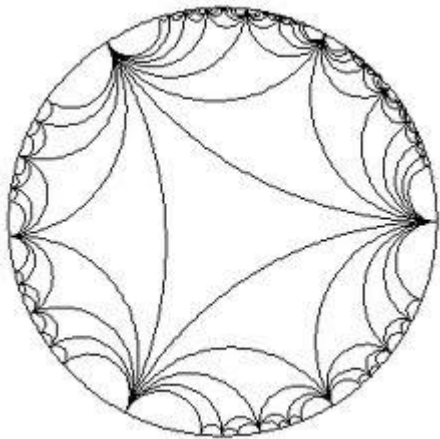


# L'evoluzione degli studi sui modelli di geometria iperbolica

Hilbert nel 1901 dimostra che non esistono immersioni isometriche regolari e lisce del piano iperbolico nello spazio tridimensionale euclideo

Poincaré costruisce i due eleganti modelli del disco e del semipiano superiore, nei quali l'intero piano iperbolico può essere rappresentato

Da allora il piano iperbolico viene identificato con uno dei due modelli di Poincaré



# La questione dei modelli materiali è chiusa?

Nell'articolo di Capelo A.C., Ferrari M., *La cuffia di Beltrami: storia e descrizione*, in "Bollettino di storia delle scienze matematiche", 1982, pp. 233-247 si legge:

*“Si tratta di un modello di un pezzo di superficie a curvatura costante negativa che, **sebbene oggi sia quasi dimenticato**, ha avuto indubbi momenti di gloria, sia perché si è inserito nella questione della non contraddittorietà della geometria non euclidea, sia perché è stato costruito da uno dei maggiori matematici del secolo scorso: Eugenio Beltrami”*

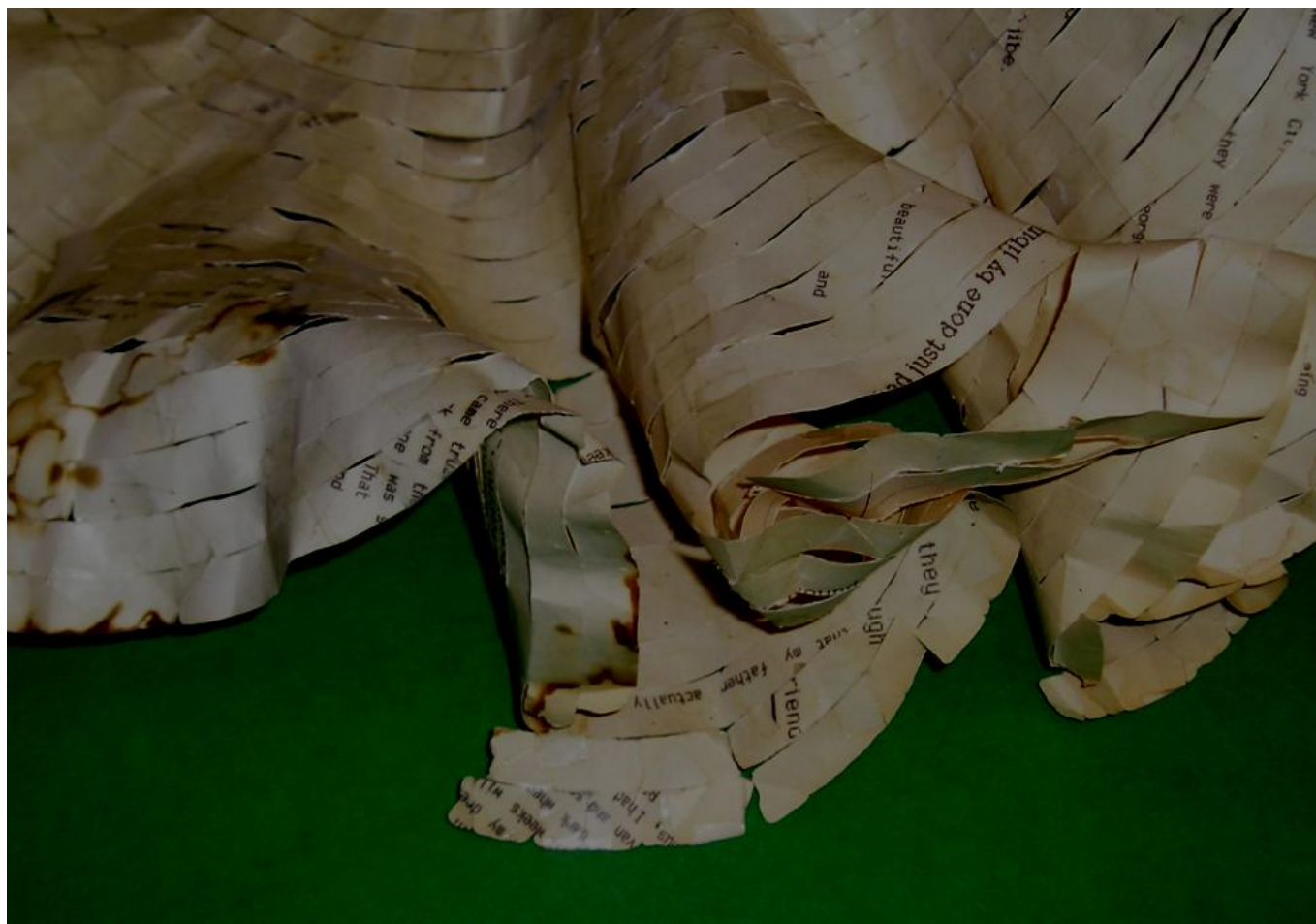
Ma...



William Thurston (30 ottobre 1946, 21 agosto 2012) è stato uno tra i più importanti matematici contemporanei.

Ha vinto la Medaglia Fields per i suoi contributi in topologia delle dimensioni basse.

"... I was struggling to get a grip on what the hyperbolic plane looked like"



# David Henderson e Daina Taimina



Nei primi tempi, Taimina utilizza per i suoi corsi un modello approssimativo di carta e nastro adesivo costruito con santa pazienza dal marito, come aveva fatto nell'Ottocento Eugenio Beltrami, per far visualizzare agli studenti un piano iperbolico: ... Purtroppo il modello è delicato, continua a rompersi, è tutto spiegazzato. Lei tenta di riprodurlo a maglia. Non le riesce, riprova all'uncinetto e le viene un piano iperbolico anulare. Perfetto. Fatta la prima catena, basta aumentare con un numero costante di maglie – una ogni 12 per esempio - ogni catena successiva.



Se, partendo da poche catenelle inserisco in ogni riga, rispetto alla riga precedente, una maglia ogni  $n$  (ad esempio una ogni sei, ogni dieci, ogni dodici) ottengo una curiosa superficie increspata, che, analogamente con quello che succede per una superficie sferica, non riesco a distendere su un piano. È sorprendente vedere come, con una regola così semplice, si ottenga *naturalmente* una superficie a geometria iperbolica



# E la cuffia di Beltrami?

"... Ho avuto, in questo periodo, una idea bizzarra, che vi comunico in quanto potrebbe essere per voi più facile che per me metterla in esecuzione. Ho voluto tentare di costruire materialmente la superficie pseudosferica, sulla quale si realizzano i teoremi della geometria non euclidea. Per questo ho preso l'equazione p. 21 riga 6 del mio *Saggio* ecc. e ne ho concluso

$$\log s_1 = \log s_2 + \frac{\tau}{R} \quad (\log \text{ hyp})$$

da cui, ponendo,  $s_2 = 1$  ,  $s_1 = s$

$$\log s = \frac{\tau}{R} \quad \tau = R \log s''$$



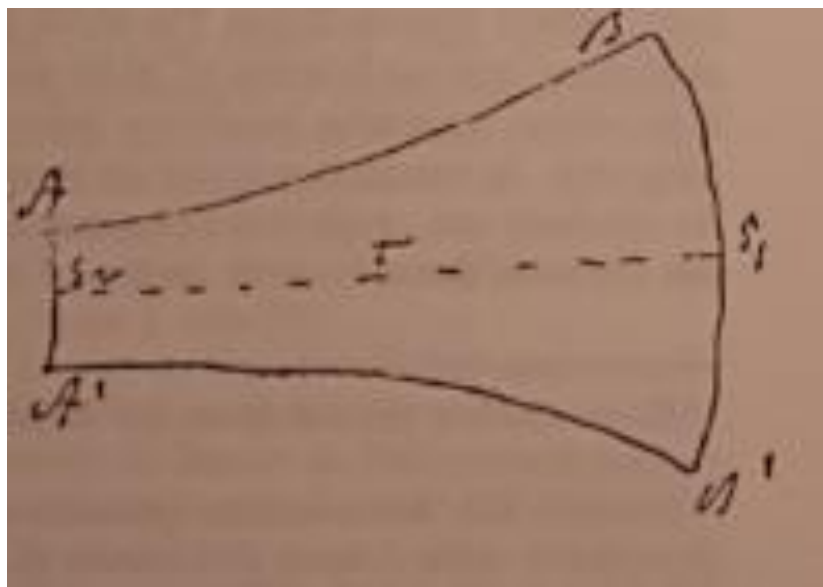
*Osserviamo che questo si può esprimere anche come*

$$s = e^{\frac{\tau}{R}},$$

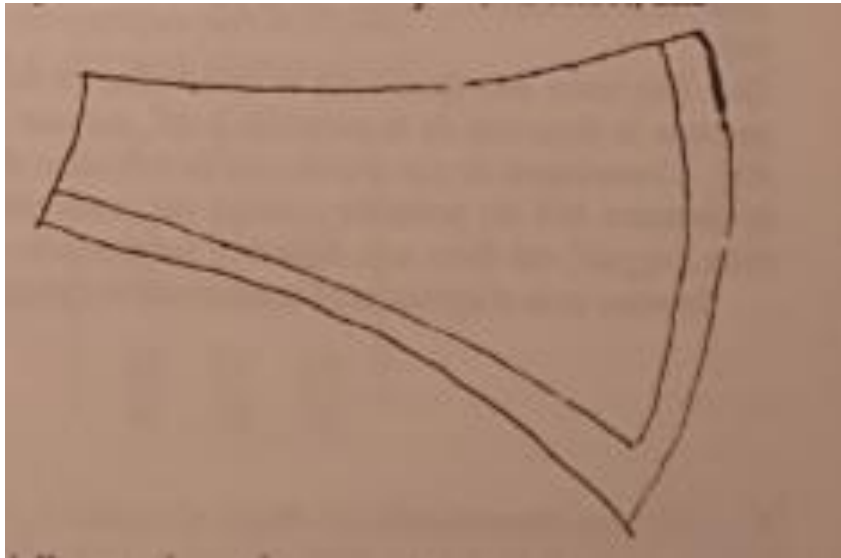
*oppure, nel caso più generale,*

$$s_1 = s_2 e^{\frac{\tau}{R}}$$

"Se dunque si considera la superficie compresa tra due meridiani, abbastanza ravvicinati per cui la si possa rimpiazzare, su una certa lunghezza, con un piano, si può, con pezzi di carta convenientemente ritagliati, riprodurre i trapezi curvilinei dei quali la superficie vera si può pensare composta. "



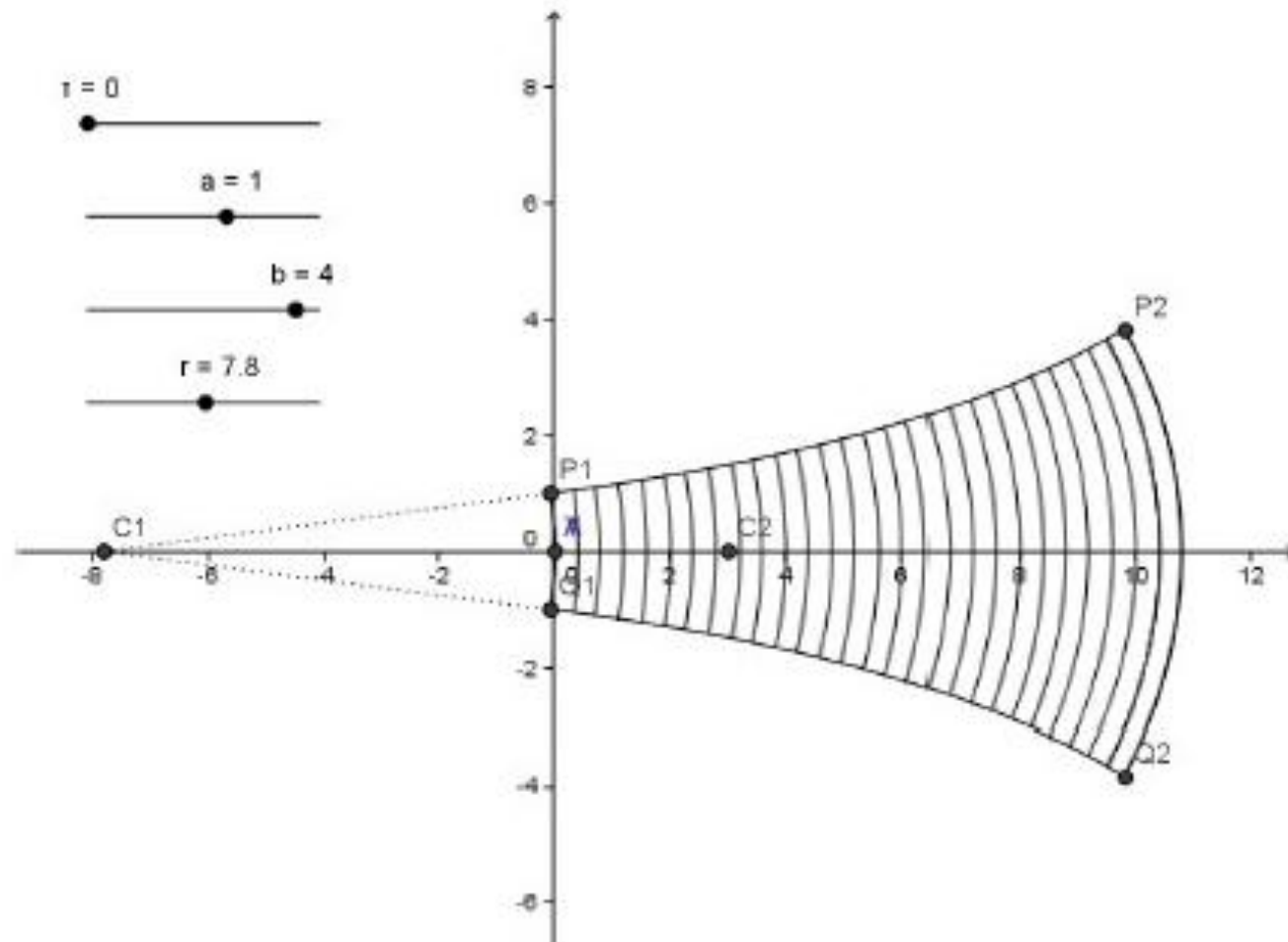
"E poiché questa superficie è **dappertutto la stessa** (nel senso di Gauss, vale a dire considerata come flessibile) si vede **che i pezzi di carta possono essere tutti esattamente uguali tra loro: il loro assemblaggio deve nondimeno riprodurre approssimativamente la superficie.**"



In definitiva, che cosa fa Beltrami?

- Fissa un raggio di curvatura  $R$
- Con centro  $C$  costruisce un arco di circonferenza  $P_1Q_1$  di lunghezza  $s_2$  (nel suo caso 2cm)
- Costruisce l'asse di  $P_1Q_1$
- Spostando  $C$  sull'asse di  $P_1Q_1$  di uno spostamento  $\tau$  ottiene un nuovo centro, e con questo centro costruisce un nuovo arco di circonferenza  $s$ , sempre dello stesso raggio, ma di lunghezza  $s = s_2 e^{\frac{\tau}{R}}$
- ***Tutto questo viene bene con Geogebra!***

Il modulo usato da Beltrami è la regione "spazzata" da un arco di cerchio, la cui lunghezza aumenta esponenzialmente, all'avanzare del centro del cerchio lungo l'asse dell'arco stesso



"Poiché la curvatura geodetica dei paralleli  $s_1, s_2$  ecc. è la stessa per tutti e uguale a  $R$ , raggio della superficie, e poiché questa curvatura è misurata nel piano tangente, ho creduto conveniente rappresentare i paralleli suddetti tramite cerchi di raggio  $R$  aventi i centri su una retta, che diventa asse di simmetria della figura piana; le spazature di questi cerchi, o dei loro centri, sono date dalla serie di valori di  $\tau$  dopo aver scelto il valore di  $R$ . I piccoli errori di  $\tau$  non influiscono sulla descrizione della curva (che si ottiene prendendo su ogni asse la lunghezza corrispondente di  $s$ ), perché le ordinate (circolari) di questa curva variano molto lentamente: conviene dunque prendere per argomento  $s$  e non  $\tau$ ."

"Se dunque si considera la superficie compresa tra due meridiani, abbastanza ravvicinati per cui la si possa rimpiazzare, su una certa lunghezza, con un piano, si può, con pezzi di carta convenientemente ritagliati, riprodurre i trapezi curvilinei dei quali la superficie vera si può pensare composta.

E poiché questa superficie è **dappertutto la stessa** (nel senso di Gauss, vale a dire considerata come flessibile) si vede **che i pezzi di carta possono essere considerati tutti uguali tra loro: il loro assemblaggio deve nondimeno riprodurre approssimativamente la superficie.**"

"Ho effettuato io stesso questa costruzione per  $R = 20$  cm e ho formato una porzione di superficie con 50 pezzi ricoprendo circa un quarto di metro quadro. Nonostante le imperfezioni dovute alla mia poca abilità, dapprima, poi dalla mancanza di pratica e dall'approssimazione inseparabile del procedimento stesso oso dire che il mio scopo è stato raggiunto di modo che io credo che, approfittando dell'esperienza che suggerisce sia dei mezzi sia delle precauzioni si potrebbero ottenere risultati molto gradevoli in senso geometrico, e anche molto utili. Con il mio modello in effetti, per quanto grossolano sia, si verificano molto bene le indicazioni della teoria: **dapprima la flessibilità, così spesso contestata alle superfici non sviluppabili** (io sostengo su questo stesso argomento una corrispondenza con un professore molto illustre, che arrendendosi alle mie ragioni, consente ora di riconoscere la flessibilità alle superfici sghembe); **poi la possibilità di formare altre superfici di rivoluzione in numero infinito**."



"Quest'ultimo fatto appare in modo molto chiaro e si potrebbe dire molto simpatico. In effetti, vedendo una superficie che, quando è dispiegata presenta un aspetto strano e sempre diverso, si ha difficoltà a credere che la si possa arrotolare (cominciando da un punto qualsiasi del perimetro) come si farebbe con un foglio di carta ordinario e strettamente quanto si vuole in modo da approssimarlo indefinitamente alla forma cilindrica. La spiegazione di questo fatto si trova alle pagine 18 e 19 del saggio, in conseguenza dell'equazione (14)."

"Dopo questa prima esperienza io credo che portando il valore di  $R$  a 25 cm si può, senza aumentare gli errori e diminuendo di molto il lavoro, rendere i pezzi molto più grandi di quello che io ho usato, prendendo  $s_2 = 2cm$ ,  $s_1 = 8cm$ , il che porta per la lunghezza del pezzo a 347mm. (Convienne rendere  $s_1/s_2$  numero intero, per facilitare l'attacco dei diversi pezzi). Ho tracciato il modello in cartone con i nuovi dati inserendo tutte le ordinate (circolari), crescendo di 1 mm. Lo devo ora tagliare, per utilizzarlo per il taglio della carta: in questo taglio bisogna lasciare su due dei lati del trapezio un po' di margine, per incollarvi i trapezi successivi. Credo che bisognerà usare una carta molto robusta, al contrario di quello che avevo fatto. Del resto si otterrebbe una ben più grande esattezza costruendo il modello in rame e appoggiandovi un coltellino affilato per tagliare direttamente la carta e forse anche più pezzi per volta."











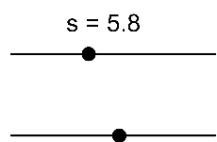












grazie

Maria Angela Chimetto  
Geogebra Institute CRDM-Padova  
Centro ricerche didattiche “U. Morin”

[mariangela1951@gmail.com](mailto:mariangela1951@gmail.com)